

Bacalaureat 2022

Matematică

M_șt-nat

M_tehnologic

Teme recapitulative
40 de teste, după modelul M.E.
(10 teste fără soluții)

Cuprins

<i>Cuvânt-înainte</i>	4
-----------------------------	---

Enunțuri Soluții

TEME RECAPITULATIVE

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică	5	239
2. Șiruri. Progresii	10	240
3. Funcții	15	241
4. Funcția de gradul I	21	242
5. Funcția și ecuația de gradul al II-lea	26	242
6. Vectori în plan	32	243
7. Elemente de trigonometrie și aplicații în geometrie	37	244

Clasa a X-a

1. Numere reale	43	246
2. Funcții și ecuații	47	247
3. Probleme de numărare și combinatorică	54	248
4. Matematici aplicate. Probabilități	58	248
5. Geometrie analitică	63	249
6. Numere complexe*	68	250
7. Probleme de sinteză din materia claselor IX-X	73	250

Clasa a XI-a

1. Matrice	80	252
2. Determinanți	88	253
3. Aplicații ale determinanților în geometrie	93	253
4. Inversa unei matrice. Ecuații matriceale	97	254
5. Sisteme de ecuații liniare	103	255
6. Probleme de sinteză – algebră	110	256
7. Limite de funcții. Asimptote	115	260
8. Funcții continue	122	261
9. Derivata unei funcții	127	262
10. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor	134	263
11. Probleme de sinteză – analiză matematică	139	264

Clasa a XII-a

1. Legi de compoziție.....	144.....	268
2. Structuri algebrice. Morfisme	149.....	268
3. Polinoame	154.....	269
4. Probleme de sinteză – algebră.....	160.....	269
5. Primitive.....	165.....	272
6. Integrala definită	171.....	272
7. Aplicații ale integralei definite.....	176.....	273
8. Probleme de sinteză – analiză matematică.....	181.....	274

TESTE PENTRU BACALAUREAT, DUPĂ MODELUL M.E.

1. MODELE DE TESTE REZOLVATE

PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT	188.....	279
---	-----------------	------------

2. MODELE DE TESTE PROPUSE

PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT	226
---	------------

<i>Bibliografie</i>	302
----------------------------------	------------

Teme recapitulative

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1.1. NOȚIUNI TEORETICE

1.1.1. Tipuri speciale de raționament

Metoda reducerii la absurd: Pentru a demonstra o implicație de tipul: *Dacă p (ipoteza) atunci q (concluzia)*, putem presupune concluzia p ca fiind falsă și apoi împreună cu ipoteza p construim un raționament care conduce la contradicție.

Metoda inducției matematice: Se aplică pentru propoziții de forma: *Demonstrați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, are loc $p(n)$* , unde $p(n)$ reprezintă un enunț care depinde de variabila n . Se verifică valoarea de adevăr a propoziției obținute în cazul $n = n_0$, se presupune ca fiind adevărată propoziția obținută în cazul $n = k$ și se demonstrează valoarea de adevăr a propoziției obținute pentru $n = k + 1$.

1.1.2. Mulțimi și cardinale

Teoremă: Orice mulțime A cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, admite 2^n submulțimi.

Definiție: Pentru o mulțime finită A , numim **cardinalul** său și notăm $\text{Card}(A)$ ca fiind numărul său de elemente.

Proprietăți: Sunt adevărate următoarele proprietăți:

P1. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$;

P2. $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \cdot \text{Card}(B)$.

1.1.3. Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$

Definiție: Numim **modulul** unui număr real x și notăm $|x|$ ca fiind distanța de la originea axelor la poziția numărului pe axă.

Proprietățile modulului:

P1. $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R};$

P2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

P3. $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y;$

P4. $|x| < c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c; c);$

P5. $|x| > c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty);$

P6. $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases};$

P7. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R};$

P8. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*;$

P9. $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Definiție: Numim **parte întreagă** a numărului real x și notăm $[x]$ ca fiind cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu x .

Proprietățile părții întregi: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc proprietățile:

P1. $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z};$

P2. $[x] = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in [k, k+1).$

Definiție: Numim **parte fracționară** a numărului real x și notăm $\{x\}$ ca fiind diferența dintre număr și partea sa întreagă.

Proprietățile părții fracționare: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc proprietățile:

P1. $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z};$

P2. $\{x\} \in [0, 1).$

1.2. PROBLEME DE ÎNȚIERE

11. Determinați numărul de submulțimi ale mulțimii $A = \{a, b, c\}$.
12. Determinați numărul de submulțimi nevide ale mulțimii $A = \{a, b, c, d\}$.
13. Reuniunea a două mulțimi, cu câte 20 de elemente fiecare, are 31 de elemente. Determinați numărul de elemente comune ale celor două mulțimi.
14. Demonstrați că $(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 \in \mathbb{N}$.
15. Arătați că numărul $a = (-5) \cdot [0, (4) + 0, 1(5)]$ este întreg.
16. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ dacă avem egalitatea de intervale $[a - b; a + b] = [1; 7]$.
17. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați cardinalul mulțimii:
 $B = \{x = (a - 1)(a - 2)(a - 3) + 4 \mid a \in A\}$.
18. Determinați intersecția mulțimilor $A = (1, 5)$ și $B = [3, 11]$.
19. Determinați partea întreagă a numărului $b = 2,13 + 1,88$.
110. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|x - 2| = 5$.

1.3. PROBLEME DE CONSOLIDARE

- C1. Fie mulțimea $A = \{a, b, c, d\}$. Determinați numărul de submulțimi ale lui A care îl conțin pe d .

- C2.** O mulțime admite 31 de submulțimi nevide. Determinați numărul de elemente ale acestei mulțimi.
- C3.** Două mulțimi, cu câte 28 de elemente fiecare, au 11 elemente comune. Determinați numărul de elemente ale reuniunii lor.
- C4.** Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determinați numărul de submulțimi care conțin simultan pe 1 și pe 3.
- C5.** Demonstrați că $\sqrt{4} + \frac{1}{3} + 2, (6) = 5$.
- C6.** Determinați elementele mulțimii $\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{6}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.
- C7.** Determinați toate valorile reale ale numărului $x \in \mathbb{R}$ pentru care:

$$2 \in (4x - 2; 2x + 6).$$
- C8.** Elevii unei clase sunt angrenați fiecare într-o activitate sportivă, 12 la volei, iar 25 la fotbal. Știind că 7 dintre ei practică ambele sporturi, determinați numărul de elevi ai clasei.
- C9.** Determinați cel mai mare număr natural al mulțimii $A \setminus B$, dacă $A = [5, 6]$ și $B = [5, 10]$.
- C10.** Determinați câte elemente întregi conține mulțimea $A \cup B$, unde $A = (-2, 3)$ și $B = (0, 5)$.
- C11.** Ordonăți crescător numerele $a = 2,010$, $b = 2,0(10)$ și $c = 2,(010)$.
- C12.** Determinați cardinalul mulțimii $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2}{x-3} \in \mathbb{Z}\right\}$.
- C13.** Fie numărul rațional $\frac{11}{9} = \overline{1,a_1a_2a_3\dots a_n\dots}$. Calculați produsul $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{10}$.
- C14.** Fie numărul rațional $\frac{13}{6} = \overline{2,a_1a_2a_3\dots a_n\dots}$. De câte ori apare cifra 3 printre cifrele $a_1, a_2, \dots, a_{2004}$?
- C15.** Se consideră numărul rațional $\frac{23}{15} = \overline{1,a_1a_2a_3\dots a_n\dots}$. Calculați suma:

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_{2009}.$$
- C16.** Fie mulțimile $A = (-3; 4]$ și $B = (1; 5]$. Determinați cardinalul mulțimii:

$$(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}.$$

C17. Fie numerele $a = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{8}$ și $b = \sqrt{162} + \sqrt{18} + \sqrt{72} + \sqrt{72}$. Calculați media geometrică a numerelor a și b .

C18. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|1 - 2x| = |x + 4|$.

C19. Demonstrați că $|2 - \sqrt{5}| + |3 - \sqrt{5}|$ este număr natural.

C20. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $|3x - 2| = 11$.

C21*. Calculați $\left[\frac{17}{5}\right] + \left\{\frac{11}{6}\right\}$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x .

C22*. Determinați partea întreagă a numărului $a = \sqrt{17}$.

C23*. Determinați partea fracționară a numărului $b = \sqrt{25} + \sqrt{26}$.

C24*. Se consideră numărul $A = \sqrt{(\sqrt{2} - 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}$. Demonstrați că $A \in \mathbb{N}$.

C25*. Arătați că $A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$ este număr natural.

C26*. Demonstrați că $\left[\sqrt{3} + \sqrt{25}\right] = \left[\sqrt{4} + \sqrt{19}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

C27*. Demonstrați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

C28*. Demonstrați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, avem:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

C29*. Demonstrați că numărul $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ este irațional.

C30*. Arătați că, pentru orice număr natural nenul n , fracția $\frac{2n-1}{2n+1}$ este ireductibilă.

1.4. TESTE DE VERIFICARE

Testul 1

1. Determinați elementele mulțimii $A \cap B$ dacă $A = (2003, 2015)$ și $B = (2014, 2016)$.
2. Calculați suma $|-3| + |-5| \cdot 2$.
3. Demonstrați că $\sqrt{4} + \sqrt{36} = \sqrt{64}$.
4. Câte submulțimi ale mulțimii $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ conțin doar numere impare?
5. Ordonați crescător numerele $a = \sqrt{4} - 4$, $b = \sqrt{9} - 9$ și $c = \sqrt{16} - 16$.
6. Demonstrați că numărul $A = (2 + \sqrt{5})^2 + (2 - \sqrt{5})^2$ este natural.

Testul 2*

1. Determinați cel mai mic număr întreg al mulțimii $A \cap B$ dacă $A = (2010, 2016)$ și $B = (2013, 2020)$.
2. Determinați partea întreagă a numărului $x = \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$.
3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $||2x - 1| - 3| = 5$.
4. Comparați numerele $a = 5\sqrt{3}$ și $b = 3\sqrt{7}$.
5. Fie numărul rațional $\frac{5}{4} = \overline{1, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots}$. Calculați suma $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2014}$.
6. Demonstrați prin inducție matematică că egalitatea $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Testul 3

1. Rezultatul calculului următor $1,2^2 - 1,1 \cdot 1,3$ este:
A. 0,1; B. -0,1; C. 0,01; D. -0,01.
2. Partea întreagă a numărului $x = -\sqrt{13}$ este egală cu:
A. -3; B. -4; C. 3; D. 4.
3. Fie $A = (5; 11)$ și $B = [7; 12]$. Cel mai mare număr al mulțimii $A \cap B$ este:
A. 9; B. 12; C. 11; D. 10.
4. Numărul de elemente al mulțimii $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x = -\frac{3}{2n-1}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ este:
A. 2; B. 4; C. 0; D. 1.
5. Valoarea numărului natural a din relația $0,5 + 0,(3) + 1,1(6) = \frac{a}{2020}$
A. 2020; B. 2; C. 1010; D. 4040.

6. Soluția ecuației $|2x - 1| = 7$ este inclusă în intervalul:

- A. $(-4; 4)$; B. $(-3; 5)$; C. $(-4; 5)$; D. $(-3; 4)$.

2. Șiruri. Progresii

2.1. NOȚIUNI TEORETICE

2.1.1. Șiruri

Terminologie:

- Vom nota cu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mulțimea termenilor șirului;
- x_n reprezintă al n -lea termen al șirului.

Forme de prezentare:

- Prin enumerarea termenilor, de exemplu șirul 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...;
- Prin formula termenului general, de exemplu șirul $x_n = \frac{2n+1}{3n+4}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
- Prin formulă de recurență, de exemplu șirul
$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = 3x_n - 2, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

2.1.2. Progresii aritmetice

Definiție: Se numește **progresie aritmetică** un șir de numere cu proprietatea că fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din precedentul adunând aceeași cantitate constantă numită *rație*.

Proprietăți: Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică cu rația r . Atunci:

- P1.** $a_{n+1} = a_n + r$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
- P2.** $a_n = a_1 + (n-1)r$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
- P3.** $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$;
- P4.** Dacă $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, atunci $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

2.1.3. Progresii geometrice

Definiție: Se numește **progresie geometrică** un șir de numere nenule cu proprietatea că fiecare termen, începând cu al doilea, se obține din precedentul prin înmulțirea cu aceeași cantitate constantă numită *rație*.

Proprietăți: Fie $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ o progresie geometrică cu rația q . Atunci:

P1. $b_{n+1} = b_n q$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

P2. $b_n = b_1 q^{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

P3. $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$;

P4. Dacă $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ și $q \neq 1$, atunci $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$.

2.2. PROBLEME DE ÎNȚIERE

11. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un șir de numere oarecare astfel încât $x_n = \frac{2n+1}{3n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați x_{10} .
12. Determinați primul termen al progresiei aritmetice $a_1, a_2, 13, 17, 21, \dots$.
13. Într-o progresie aritmetică cu rația 3, avem $a_1 = 2$. Calculați a_5 .
14. Într-o progresie aritmetică cu rația 5, avem $a_8 = 70$. Calculați a_1 .
15. Într-o progresie aritmetică cu rația 4, avem $a_6 = -13$. Calculați a_{10} .
16. Într-o progresie aritmetică cu $a_1 = 7$, avem $a_7 = 25$. Determinați rația progresiei.
17. Într-o progresie geometrică cu rația -1 , avem $b_1 = 5$. Calculați b_{2020} .
18. Într-o progresie geometrică cu rația 2, avem $b_7 = 56$. Calculați b_6 .
19. Într-o progresie geometrică cu rația $\frac{1}{2}$, avem $b_3 = 64$. Calculați b_7 .
110. Într-o progresie aritmetică, avem $a_1 = 2$ și $a_{20} = 98$. Calculați suma:
$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}.$$

2.3. PROBLEME DE CONSOLIDARE

- C1. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un șir astfel încât $x_n = \frac{3n+1}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați suma
 $x_1 + x_3 + x_5 + x_7$.
- C2. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un șir astfel încât $x_n = 4n - 3$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați al
câtelea termen al șirului este numărul 37.
- C3. Într-o progresie aritmetică avem $a_5 = 24$ și $a_9 = 76$. Calculați a_7 .
- C4. Într-o progresie aritmetică avem $a_2 = 7$ și $a_{10} = 15$. Calculați a_{2008} .

- C5.** Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică de rație 2, în care $a_3 + a_4 = 8$. Determinați a_1 .
- C6.** Stabiliți dacă numărul 2007 aparține progresiei aritmetice 2, 7, 12, 17,
- C7.** Determinați primul termen al unei progresii geometrice $b_1, b_2, 18, 54, 162, \dots$.
- C8.** Într-o progresie geometrică cu rația negativă, avem $b_2 = 3$ și $b_4 = 147$. Determinați b_3 .
- C9.** Determinați numărul real x , știind că numerele 2, x și $x + 4$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- C10.** Într-o progresie geometrică avem $b_2 = 5$ și $b_5 = 40$. Determinați b_1 .
- C11.** Într-o progresie geometrică cu termeni pozitivi, suma primilor doi termeni este 4, iar a următorilor doi termeni este 36. Determinați primul termen al progresiei.
- C12.** Demonstrați că, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, numerele $x-1$, $2x+3$ și $3x+7$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- C13.** Determinați numărul $x \in (0; \infty)$, știind că x , 6 și $x-5$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.
- C14.** Calculați suma $1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \dots + 28 + 31$.
- C15.** Calculați suma primilor 30 de termeni ai progresiei aritmetice, știind că:
- $$a_4 - a_2 = 4 \text{ și } a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30.$$
- C16.** Determinați primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 24, \dots$.
- C17.** Într-o progresie geometrică avem $b_1 + b_2 = 5$ și $b_2 + b_3 = 20$. Calculați suma $b_1 + b_2 + b_3$.
- C18.** Într-o progresie aritmetică cu rația 2, suma primilor 9 termeni este 351. Determinați primul termen al progresiei.
- C19.** Numerele reale pozitive a, b, c, d sunt în progresie geometrică. Dacă $d - a = 7$ și $c - b = 2$, aflați rația progresiei.
- C20.** Calculați suma $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9$.
- C21*.** Într-o progresie aritmetică avem $a_{2008} = 2a_{1008}$. Calculați a_8 .
- C22*.** Într-o progresie geometrică avem $b_{2006} = 3$ și $b_{2010} = 12$. Calculați b_{2008} .